**ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ**

Stability of the systems

Тема 4. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Диплом, это двадцать минут позора и кусок хлеба на всю жизнь. Временная функция многовариантна, характеристическое уравнение черт знает какого порядка, но система работает устойчиво. Стоит ли подводить под это дело еще и частотный анализ?

Владимир Кузьмин. Новосибирский геофизик Уральской школы. ХХ в.

Ты никогда не будешь достаточно знать, если не будешь знать больше чем достаточно.

Уильям Блейк.

Содержание

Введение.

1. Критерии устойчивости САУ. Понятие устойчивости системы. Условие устойчивости САУ. Алгебраические критерии устойчивости. Критерий Рауса. Критерий Гурвица.

2. Частотные критерии устойчивости САУ. Принцип аргумента. Критерий устойчивости Михайлова. Критерий устойчивости Найквиста.

3. Запас устойчивости САУ. Понятие структурной устойчивости. Понятие запаса устойчивости. Анализ устойчивости по ЛЧХ.

4. Точность САУ. Статическая точность. Динамическая точность.

5. Качество САУ. Показатели качества систем автоматического управления. Показатели качества переходного процесса. Последовательное корректирующее устройство. Параллельное корректирующее устройство. Метод Солодовникова. Программы анализа качества процессов управления.

6. Случайные процессы в САУ. Модели случайных сигналов в САУ. Фильтрация помех. Фильтр Винера. Частотная характеристика фильтра.

**Введение**

Важнейшей задачей анализа динамических систем управления является решение вопроса об их устойчивости. Техническое понятие устойчивости систем автоматического управления отражает свойство технической системы не только стабильно работать в нормальных режимах, но и "не уходить вразнос" при отклонении всевозможных параметров системы от номинала и влиянии на систему дестабилизирующих воздействий, т. е. наличия или отсутствия в системе способности возвращаться к равновесному состоянию, из которого она выводится возмущающими или управляющими воздействиями. Устойчивость системы - простейшее техническое требование в ряду более сложных требований, связанных с показателями качества и точности САУ. Свойство устойчивости может быть выражено числовыми показателями, которые могут быть вычислены и связаны с другими показателями качества и точности системы.

**4.1. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ САУ [1, 7, 11, 12].**

***Понятие устойчивости системы.*** Следящая система находится в состоянии равновесия, если при отсутствии воздействия на систему возмущающих факторов ошибка регулирования (разность между заданным и фактическим состоянием системы) стремится к нулю. Под устойчивостью понимается способность динамической системы возвращаться в равновесное состояние (положение равновесия) после окончания действия возмущения, нарушившего это равновесие. Неустойчивая система после воздействия возмущения непрерывно удаляется от равновесного состояния или начинает совершать вокруг него колебания с нарастающей амплитудой.

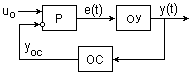


Рис. 4.1.1.

Возникновение неустойчивых (расходящихся) колебаний в системе можно проследить на примере следящей системы с обратной связью (рис. 4.1.1). Допустим, что в установившемся состоянии равновесия при опорном сигнале uo на регуляторе Р выходное состояние объекта управления ОУ равно yуст. Это состояние поддерживается сигналом рассогласования еуст, который формируется в регуляторе Р по разности опорного сигнала и сигнала обратной связи уос-уст, т.е. еуст = uo-уос-уст. В первый момент включения системы в силу инерционности обратной связи уос = 0, а, следовательно, e(t) >> еуст, что вызывает нарастание выходной величины y(t), которая будет стремиться к y(t) >> ууст по крайней мере до тех пор, пока сигнал обратной связи не начнет уменьшать значение e(t). Однако значительно возросшая величина y(t) через ОС передается на вход регулятора системы и может настолько существенно уменьшить значение e(t), что это может привести к последующему снижению величины выходного сигнала до значений y(t) << ууст, т.е. к возникновению колебательного процесса относительно равновесного состояния. При неблагоприятном соотношении параметров системы колебательный процесс может быть незатухающим и даже расходящимся. Пример такого процесса в концертной акустике хорошо известен – свист из динамиков, если коэффициент обратной связи от динамиков на микрофоны на определенных частотах становится положительным.

Устойчивость линейной системы определяется не характером возмущения, а структурой самой системы. Говорят, что система устойчива "в малом", если определен факт наличия устойчивости, но не определены ее границы. Система устойчива "в большом", когда определены границы устойчивости и то, что реальные отклонения не выходят за эти границы. Соответственно, и задача исследования систем на устойчивость может быть поставлена двояко:

1) устойчива ли система при заданном значении ее параметров;

2) в каких диапазонах можно изменять параметры системы, не нарушая ее устойчивости.

Вторая постановка задачи об устойчивости имеет место при наладке и эксплуатации систем автоматического управления.

В соответствии с классическим методом решение дифференциального уравнения для системы ищется в виде:

y(t) = усв(t) + увын(t). (4.1.1)

Здесь усв(t) – свободная составляющая, общее решение однородного дифференциального уравнения с нулевой правой частью:

a0y(n) + a1y(n-1) + ... + an-1y’ + any = 0,

т.е. все внешние воздействия сняты, и состояние системы определяются лишь собственной структурой.

Функция увын(t) представляет собой частное решение неоднородного дифференциального уравнения, под которым понимается уравнение с ненулевой правой частью. Физически это означает, что к системе приложено внешнее воздействие u(t). Поэтому вторая составляющая общего решения называется вынужденной. Она определяет вынужденный установившийся режим работы системы после окончания переходного процесса.

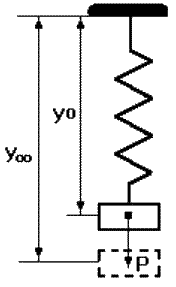


Рис. 4.1.2.

Можно провести аналогию между САУ и пружиной, колебания которой описываются аналогичным дифференциальным уравнением (рис. 4.1.2). Оттянем пружину, а затем отпустим, предоставив ее самой себе. Пружина будет колебаться в соответствии со свободной составляющей решения уравнения, характер колебаний будет определяться только структурой самой пружины. Если подвесить к пружине груз, то на свободные колебания наложится внешняя сила Р. После затухания колебаний, описываемых только свободной составляющей общего решения, система перейдет в новый установившийся режим, характеризуемый вынужденной составляющей увын = y(t→∞). Если внешнее воздействие само будет изменяться по синусоидальному закону P = Po sin(t+), то после затухания переходного процесса система будет совершать вынужденные колебания с той же частотой, что и вынуждающая сила, то есть увын = ymax sin(t+).

Таким образом, под устойчивостью понимается свойство системы возвращаться в состояние равновесия после вывода ее из этого состояния и прекращения изменения задающего или возмущающего воздействия.

Только устойчивая система является работоспособной. Основы строгой теории устойчивости динамических систем были разработаны акад. А. М. Ляпуновым в работе «Общая задача об устойчивости движения» (1892 г.). Понятия об устойчивости, вытекающие из этой работы, заключаются в следующем.

Если система описывается линейным дифференциальным уравнением, то ее устойчивость не зависит от величины возмущения. Линейная система, устойчивая при малых возмущениях, будет устойчива и при больших. Нелинейные системы могут быть устойчивы при малых возмущениях и неустойчивы при больших.

Наглядное представление о нелинейных системах, устойчивых при малых и неустойчивых при больших возмущениях, дает рассмотрение шара во впадине, приведенного на рисунке слева. При малых воздействиях на шар и его малых отклонениях, не превышающих края впадины, шар возвращается в исходное положение, т. е. система шар - поверхность устойчива. При больших воздействиях с отклонением за край впадины шар не возвращается в исходное положение - система неустойчива. Поэтому для нелинейных систем устойчивость исследуется отдельно для случая малых и больших возмущений.

Об устойчивости нелинейных систем при малых возмущениях можно судить по их линеаризированным уравнениям, при больших возмущениях необходимо пользоваться нелинейными уравнениями динамики. В большинстве практических случаев системы, устойчивые при малых отклонениях, оказываются устойчивыми и при достаточно больших отклонениях, возможных в процессе эксплуатации.

Проблема устойчивости обычно возникает в замкнутых САУ из-за влияния обратной связи. Поэтому в дальнейшем устойчивость исследуется на примерах замкнутых систем, хотя методы исследования устойчивости универсальны.

***Условие устойчивости САУ.*** Применительно к сигналам в САУ частное решение для вынужденной составляющей обычно имеет простой вид, не влияющий на устойчивость. Вопрос устойчивости сводится к выяснению устойчивости свободного движения системы и требует анализа характера решения уравнения свободного движения, составленного относительно отклонения выходной величины y(t)от установившегося состояния.

Как известно, передаточная функция любой линейной динамической системы может быть приведена к виду:

W(p) = K(p)/H(p) =

= [b0pm+b1pm-1+…+bm-1p+bm] / [a0pn+a1pn-1+…+ an-1p+an], (4.1.2)

где a и b - постоянные коэффициенты, которые представляют собой вещественные числа и выражаются через конкретные физические параметры элементов системы. Полином К(р) может не содержать членов c оператором р и представлять собой произведение коэффициентов передачи звеньев, образующих систему.

Важнейшим свойством выражения (4.1.2) является условие n≥m, т. е. порядок полинома Н(р) знаменателя передаточной функции не ниже порядка полинома К(р) ее числителя. Это условие вытекает из физических свойств звеньев реальных динамических систем.

Из выражения (4.1.2) передаточной функции системы можно получить дифференциальное уравнение системы в целом как в разомкнутом, так и в замкнутом состоянии.

*Уравнения разомкнутых систем.* Если выражение (4.1.2) является передаточной функцией разомкнутой системы, то выражение

y(p) Н(р) = u(р) К(р), (4.1.3)

будет представлять собой операторное уравнение разомкнутой системы (уравнение в изображениях переменных). Положив в (4.1.3) u(p)=0, получим операторное уравнение свободного движения в разомкнутой линейной динамической системе:

y(p) H(p) = 0. (4.1.4)

Переходя в (4.1.4) к оригиналам, т. е. от операторного уравнения к дифференциальному, и обозначив y(t)=х, получаем дифференциальное уравнение свободного движения в разомкнутой линейной динамической системе

a0dnx/dtn + a1 dn-1x/dtn-1 +…+ an-1 dx/dt +an = 0 (4.1.5)

Характеристическим уравнением, соответствующим дифференциальному уравнению (4.1.5), будет

Н(р) = 0, a0pn+a1pn-1+…+ an-1p+an = 0. (4.1.6)

Отсюда следует: приравненный нулю знаменатель передаточной функции разомкнутой линейной динамической системы является характеристическим уравнением, соответствующим дифференциальному уравнению разомкнутой системы. В связи с этим многочлен Н(р)=0 называется характеристическим оператором системы.

*Уравнение замкнутых систем.* Пусть (4.1.2) является передаточной функцией разомкнутой системы. Для замкнутой системы в силу отрицательной главной обратной связи имеем u(t) = -y(t), и (4.1.3) принимает вид Н(р) y(р) = -К(р) y(р). Операторное уравнение свободного движения в замкнутой системе:

[К(р)+Н(р)]y(р) = 0, (4.1.7)

где К(р), Н(р) - соответственно числитель и знаменатель передаточной функции разомкнутой системы; y(р) — изображение координаты системы в точке ее замыкания.

На основании (4.1.7) можно записать характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению свободного движения в замкнутой системе

К(р) + Н(р) = 0. (4.1.8)

C учетом того, что Woc(p) = 1, передаточная функция замкнутой системы:

Wзс(p) = W(p)/[1 + W(p)], (4.1.9)

где W(p)=K(p)/H(p) - передаточная функция разомкнутой системы. Или:

Wзс(p) = K(p)/[K(p) + H(p)] = K(p)/Hзс(p). (4.1.9')

На этом основании характеристическое уравнение замкнутой системы можно записать в виде

Hзс(р) = 0. (4.1.10)

Таким образом, приравненная нулю сумма полинома числителя и полинома знаменателя передаточной функции разомкнутой системы или приравненный нулю полином знаменателя передаточной функции замкнутой системы являются характеристическим уравнением, соответствующим дифференциальному уравнению свободного движения в замкнутой системе.

Корни характеристических уравнений систем могут быть либо вещественными, либо попарно комплексно сопряженными. Решение однородного уравнения выражается через корни характеристического уравнения и коэффициенты перед экспонентами, которые могут быть вычислены через вычеты:

усв(t) =Сn exp(pnt). (4.1.11)

Условие устойчивости систем по Ляпунову формулируется так: *в устойчивой системе свободная составляющая решения уравнения динамики, записанного в отклонениях, должна стремиться к нулю, то есть затухать*.

Из формулы (4.1.11) нетрудно вывести условие устойчивости линейных динамических систем: линейная система будет устойчива, если все вещественные корни и все вещественные части комплексных корней характеристического уравнения, соответствующего исходному дифференциальному уравнению свободного движения системы, будут отрицательными, что дает затухающие по экспоненте решения. Если имеются чисто мнимые корни, то в переходном процессе будут гармонические незатухающие компоненты.

Таким образом, исследование устойчивости системы сводится к определению знаков вещественных частей корней характеристического уравнения системы. Но решение уравнений четвертой и более высоких степеней может встречать затруднения. Поэтому применяются косвенные методы анализа устойчивости без определения корней характеристического уравнения. Правила, позволяющие судить о знаках корней характеристического уравнения без его решения, называются критериями устойчивости. Их можно разделить на алгебраические (основаны на составлении по данному характеристическому уравнению по определенным правилам алгебраических выражений, по которым можно судить об устойчивости САУ) и частотные (основаны на исследовании частотных характеристик).

Проверку факта отрицательности вещественных частей корней можно выполнять тремя способами:

- вычислив корни непосредственно, с использованием готовых программ;

- связав расположение корней с коэффициентами характеристического уравнения для последующего аналитического исследования;

- судить об устойчивости по частотным характеристикам САУ.

Первые два способа называют алгебраическими, последний - частотным. В инженерной практике необходимо иметь эффективные и удобные правила проверки устойчивости. Сам по себе критерий не обязан быть необходимым и достаточным условием. Обычно получение такого критерия является делом более сложным, чем отдельно необходимого или достаточного критерия.

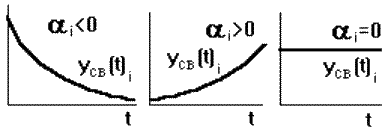


Рис. 4.1.3.

Каждому отрицательному вещественному корню i соответствует экспоненциально затухающая во времени составляющая усв(t)i, каждому положительному - экспоненциально расходящаяся, каждому нулевому корню соответствует усв(t)i = const (рис. 4.1.3).

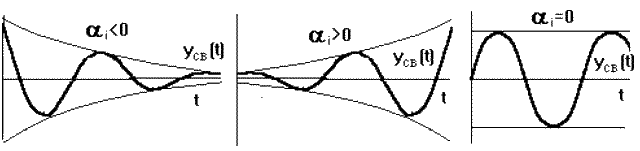


Рис. 4.1.4.

Пара комплексно сопряженных корней с отрицательной вещественной частью определяет затухающие колебания с частотой i, при положительной вещественной части - расходящиеся колебания, при нулевой - незатухающие (рис. 4.1.4).

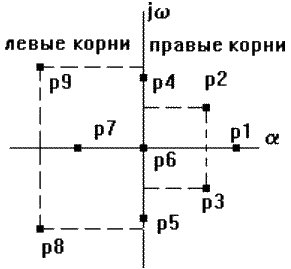


Рис . 4.1.5.

Исходя из расположения на комплексной плоскости, корни с отрицательными вещественными частями называются левыми, с положительными - правыми (рис. 4.1.5). Поэтому условие устойчивости линейной САУ можно сформулировать следующим образом: *для того, чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения были левыми.* Если хотя бы один корень правый, то система неустойчива. Если один из корней равен нулю, а остальные левые, то система находится на границе апериодической устойчивости. Если равны нулю вещественные части одной или нескольких пар комплексно сопряженных корней, то система находится на границе колебательной устойчивости.

***Алгебраические критерии устойчивости.***

*Необходимое условие устойчивости.* Если все корни характеристического уравнения левые (вещественные части всех корней отрицательны), то все коэффициенты уравнения имеют один знак, т.е. {an ><0} одновременно. Равенство коэффициентов нулю не допускается (граница устойчивости). Доказательство очень простое и заключается в разложении полинома на простейшие множители - скобки. Эти скобки могут быть вещественные или комплексно - сопряжённые. Объединим последние в пары и перемножим, при этом в скобках нет ни одного отрицательного числа, а, следовательно, знак всех членов характеристического уравнения будет определяться знаком коэффициента a0. В дальнейшем будем рассматривать только уравнения, где a0 > 0. В противном случае уравнение умножается на -1.

Рассмотренное условие при порядке системы больше 2 является необходимым, но не достаточным условием, и применяется для отсеивания заведомо неустойчивых систем. Необходимые и достаточные условия дают алгебраические критерии Рауса и Гурвица.

***Критерий Рауса.*** Используется в виде алгоритма, по которому заполняется специальная таблица с использованием коэффициентов характеристического уравнения:

1) в первой строке записываются коэффициенты уравнения с четными индексами в порядке их возрастания;

2) во второй строке – аналогично коэффициенты с нечетными индексами;

3) остальные элементы таблицы определяется по формуле: ck,i = ck+1,i-2 - ri ck+1, i-1, где ri = c1,i-2/c1,i-1, i ≥3 - номер строки, k - номер столбца.

4) Число строк таблицы на единицу больше порядка характеристического уравнения.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ri | i\k | 1 | 2 | 3 | 4 |
| - | 1 | c11 = a0 | c21 = a2 | c31 = a4 | ... |
| - | 2 | c12 = a1 | c22 = a3 | c32 = a5 | ... |
| r3 = c11/c12 | 3 | c13 = c21-r3 c22 | c23 = c31-r3 c32 | c33 = c41-r3 c42 | ... |
| r4 = c12/c13 | 4 | c14 = c22-r4 c23 | c24 = c32-r4 c33 | c34 = c42-r4 c43 | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |

 Чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса c11, c12, c13,... были положительными. Если это не выполняется, то система неустойчива, а количество правых корней равно числу перемен знака в первом столбце.

Достоинство - критерий прост в использовании независимо от порядка характеристического уравнения. Он удобен для использования на ЭВМ. Его недостаток - малая наглядность, трудно судить о степени устойчивости системы, насколько далеко отстоит она от границы устойчивости.

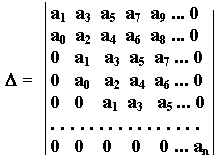


Рис. 4.1.6.

***Критерий Гурвица.*** Гурвиц предложил другой критерий устойчивости. Из коэффициентов характеристического уравнения строится определитель Гурвица  по алгоритму:

1) по главной диагонали слева направо выставляются все коэффициенты характеристического уравнения от a1 до an;

2) от каждого элемента диагонали вверх и вниз достраиваются столбцы определителя так, чтобы индексы убывали сверху вниз;

3) на место коэффициентов с индексами меньше нуля или больше n ставятся нули.

Чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения и все n главных диагональных миноров матрицы Гурвица были положительны. Число определителей Гурвица равно порядку характеристического уравнения п.

Критерий Гурвица применяют при n ≤ 5. При больших порядках возрастает число определителей, и процесс становится трудоемким. Недостаток критерия Гурвица - малая наглядность. Достоинство - удобен для реализации на ЭВМ. Его часто используют для определения влияния одного из параметров САУ на ее устойчивость. Так равенство нулю главного определителя n = an n-1 = 0 говорит о том, что система находится на границе устойчивости. При этом либо an = 0 - при выполнении остальных условий система находится на границе апериодической устойчивости, либо предпоследний минорn-1 = 0 - при положительности всех остальных миноров система находится на границе колебательной устойчивости. Параметры САУ определяют значения коэффициентов уравнения динамики, следовательно, изменение любого параметра Ki влияет на значение определителяn-1. Исследуя это влияние можно найти, при каком значении Ki определитель n-1 станет равен нулю. Это и будет предельное значение исследуемого параметра, после которого система становится неустойчивой.

**4.2. ЧАСТОТНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ САУ [7, 8, 11].**

Частотные методы исследования устойчивости основаны на связи расположения корней характеристического полинома D(р) с годографом этого полинома на комплексной плоскости, т.е. с графиком комплексной функции D(j) при изменении  от 0 до ∞. Это графоаналитические методы, позволяющие по виду частотных характеристик САУ судить об их устойчивости. Их достоинство - в простой геометрической интерпретации, наглядности и в отсутствии ограничений на порядок дифференциального уравнения.

***Принцип аргумента.*** Запишем характеристический полином САУ в виде

D(p) = a0 (p-p1) (p-p2)… (p-pn) = 0,

Его корни: pi = ai + ji = |pi| exp(j arg(pi)), где arg(pi) = arctg(i/ai) + k, |pi| - значения модулей корней.

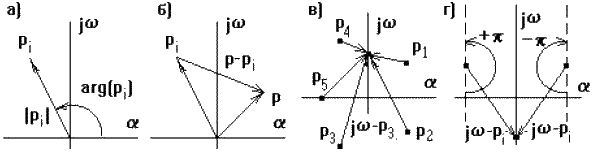


Рис. 4.2.1.

Каждый корень можно изобразить вектором на комплексной плоскости (рис. 4.2.1а), тогда разность p - pi изобразится разностью векторов (рис. 4.2.1б), где p - любое число.

Если менять значение p произвольным образом, то конец вектора p - pi будет перемещаться по комплексной плоскости, а его начало будет оставаться неподвижным, так как pi - это конкретное неизменное значение. В частном случае, если на вход системы подавать гармонические колебания с различной частотой , то p = j, а характеристический полином принимает вид:

D(j) = a0 (j - p1) (j - p2) ... (j - pn).

При этом концы векторов j - pi будут находиться на мнимой оси (рис. 4.2.1в). Если менять  от -∞ до +∞, то каждый вектор j - pi будет поворачиваться относительно своего начала pi на угол +p для левых и -p для правых корней (рис. 4.2.1г).

Характеристический полином можно представить в виде

D(j) = |D(j)| exp(j arg(D(j))),

где  |D(j)| = a0 |j-p1| |j-p2| ... |j-pn|, arg(D(j)) = arg(j-p1) + arg(j-p2) + ... + arg(j-pn).

Пусть из n корней m - правые, а n-m - левые, тогда угол поворота вектора D(j) при изменении  от -∞ до ∞ равен

F:\Дисциплины\Основы теории управления\Заготовки\Лекции по Теории АУ\Теория автоматического управления-9_files\lecture09_files\image006.gif = (n-m) - m,

или при изменении  от 0 до +∞:

F:\Дисциплины\Основы теории управления\Заготовки\Лекции по Теории АУ\Теория автоматического управления-9_files\lecture09_files\image008.gif = (n - 2m) (/2). (4.2.1)

Отсюда вытекает правило: изменение аргумента вектора D при изменении частоты от -∞ до +∞ равно разности между числом левых и правых корней уравнения D(p) = 0, умноженному на , а при изменении частоты от 0 до +∞ эта разность умножается на /2.

Это и есть принцип аргумента. Он положен в основе всех частотных критериев устойчивости. Мы рассмотрим два наиболее распространенных критерия: критерий Михайлова и критерий Найквиста.

***Критерий устойчивости Михайлова.*** Так как для устойчивой САУ число правых корней m = 0, то угол поворота вектора D(j) составит

F:\Дисциплины\Основы теории управления\Заготовки\Лекции по Теории АУ\Теория автоматического управления-9_files\lecture09_files\image012.gif= n/2. (4.2.2)

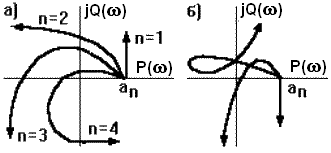


Рис. 4.2.2.

САУ будет устойчива, если вектор D(j) при изменении частоты от 0 до +∞ повернется на угол n/2. При этом конец вектора опишет кривую, называемую годографом Михайлова. Для построения годографа выражение (4.1.6) записывается с заменой p на j в форме:

a0pn+a1pn-1+…+ an-1p+an = D(j ) = P() + jQ(),

где P() - вещественная часть, как сумма всех членов характеристического уравнения, содержащих j в четных степенях, Q - мнимая часть выражения. Годограф начинается на положительной полуоси при D(0) = an, и, при изменении частоты от 0 до ∞, последовательно проходит против часовой стрелки n квадрантов комплексной плоскости, с уходом в бесконечность в n-ом квадранте (рис. 4.2.2а).

Если это правило нарушается (например, число проходимых кривой квадрантов не равно n, или нарушается последовательность прохождения квадрантов (рис. 4.2.2б)), то такая САУ неустойчива - это и есть необходимое и достаточное условие устойчивости по критерию Михайлова.

Критерий удобен своей наглядностью и используется, если известно уравнение замкнутой САУ. Если кривая проходит вблизи начала координат, то САУ находится вблизи границы устойчивости и наоборот.

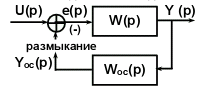


Рис. 4.2.3.

***Критерий устойчивости Найквиста.*** Этот критерий основан на связи свойства устойчивости замкнутой системы с формой АФЧХ разомкнутой устойчивой системы. Разомкнутой системой являются все последовательно соединенные блоки от входа системы до точки замыкания обратной связи (рис. 4.2.3). Исследование разомкнутой САУ проще, чем замкнутой, и его можно производить экспериментально.

Передаточная функция Wpc разомкнутой САУ:

Wpс(j) = Kpc(j)/Hpc(j),

с углом поворота фазы в соответствии с выражением (4.2.2):

 arg Hрс(j) = n/2, 0 ≤  ≤ ∞. (4.2.3)

АФЧХ замкнутой системы описывается выражением:

Wзс(j)= Wpc(j) /[1+ Wpc(j)]. (4.2.4)

Обозначим знаменатель этого выражения через W1(j):

W1(j)=1+Wpc(j)=1+Kpc(j)/Hpc(j)=H(j)/Hpc(j), (4.2.5)

где H(j) = Kpc(j) + Hpc(j), характеристический полином замкнутой системы при р=j.

В соответствии со свойствами передаточных функций порядок полинома Н(р) не превышает порядка полинома Hpc(p), т.к. H(p)=Kpc(p)+Hpc(p), а порядок полинома Kpc(p) меньше порядка полинома Hpc(p). Поэтому критерий Михайлова для замкнутой системы соответствует выражению:

 arg H(j) = (n - 2m) (/2), 0 ≤  ≤ ∞. (4.2.6)

где m - число правых корней системы, имеющей в замкнутом состоянии характеристический полином Н(р)=0.

Из (4.2.5) следует:

 arg W1(j) =  arg H(j) -  arg Hpc(j).

C учетом (4.2.3):

 arg W1(j) = (n - 2m) (/2) - n/2 = -m. (4.2.7)

В устойчивой замкнутой системе правых корней в характеристическом уравнении нет, т. е. m=0, а, следовательно, условием устойчивости замкнутой системы будет:

 arg W1(j) = 0. (4.2.8)

Условие (4.2.8) выполняется только тогда, когда кривая W1(j) при изменении частоты от 0 до ∞ не охватывает начала координат комплексной плоскости. Действительно, только в этом случае результирующий поворот вектора W1(j) при изменении  от 0 до ∞ будет равен нулю, так как возрастание угла (), обусловленное движением вектора W1(j) в положительном направлении (против часовой стрелки), будет компенсироваться таким же убыванием (), обусловленным движением вектора W1(j) в отрицательном направлении (по часовой стрелке).

Как видно из (4.2.5), переход на комплексной плоскости от годографа вектора W1(j) к годографу вектора АФЧХ разомкнутой системы Wpс(j) осуществляется сдвигом кривой W1(j) влево на -1, так как Wpc(j) = W1(j) -1. С учетом этой операции, получаем следующую формулировку амплитудно-фазового критерия устойчивости Найквиста: линейная динамическая система, устойчивая в разомкнутом состоянии, устойчива и в замкнутом состоянии, если АФЧХ разомкнутой системы Wpс(j) при изменении частоты от 0 до ∞ не охватывает на комплексной плоскости точку с координатами (-1; j0) (рис. 4.2.4, годограф 2).

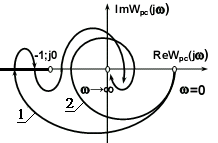


Рис. 4.2.4.

Более общая формулировка критерия Найквиста относится к системам, имеющим так называемую АФЧХ второго рода (рис. 4.2.4, годограф 1), когда Wpс(j) пересекает (неограниченное количество раз) вещественную ось левее точки Re Wpc() = -1. Будем считать положительным переход годографа через вещественную ось, если он совершается сверху вниз, и отрицательным, если он совершается снизу вверх. Для таких годографов критерий Найквиста формулируется в следующем виде: линейная динамическая система, устойчивая в разомкнутом состоянии, устойчива и в замкнутом состоянии, если при изменении частоты от 0 до +∞ разность между числом положительных переходов годографа АФЧХ разомкнутой системы через участок вещественной оси (-1; -∞) и числом отрицательных переходов равна нулю. Из этого условия видно, что система, устойчивая в разомкнутом состоянии и имеющая АФЧХ в форме кривой 1 на рис. 4.2.4, устойчива и в замкнутом состоянии.

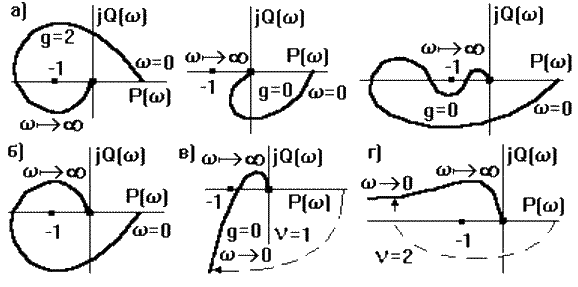


Рис. 4.2.5.

На рис. 4.2.5а приведены АФЧХ разомкнутых САУ, устойчивых в замкнутом состоянии, на рис. 4.2.5б - замкнутая САУ неустойчива.

На рис. 4.2.5в и 4.2.5г показаны АФЧХ разомкнутых астатических САУ, соответственно устойчивых и неустойчивых в замкнутом состоянии. Их особенность в том, что АФЧХ при  → 0 уходит в бесконечность. В этом случае при использовании критерия Найквиста ее мысленно замыкают на вещественную ось по дуге окружности бесконечно большого радиуса.

Критерий Найквиста нагляден. Он позволяет не только выявить, устойчива ли САУ, но и, в случае, если она неустойчива, наметить меры по достижению устойчивости.

**4.3. ЗАПАС УСТОЙЧИВОСТИ САУ [7].**

***Понятие структурной устойчивости.*** АФЧХ астатических САУ может быть неустойчивой по двум причинам: неподходящий состав динамических звеньев и неподходящие значения параметров звеньев.

САУ, неустойчивые по первой причине, называются структурно неустойчивыми. Это означает, что изменением параметров САУ нельзя добиться ее устойчивости, нужно менять ее структуру.

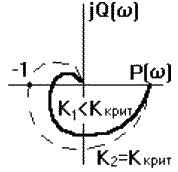


Рис. 4.3.1.

Например, если САУ состоит из любого количества инерционных и колебательных звеньев, она имеет вид, показанный на рис. 4.3.1. При увеличении коэффициента усиления САУ K каждая точка ее АФЧХ удаляется от начала координат, пока при некотором значении Ккрит АФЧХ не пересечет точку (-1, j0). При дальнейшем увеличении K, САУ будет неустойчива. И, наоборот, при уменьшении K такую САУ, в принципе, можно сделать устойчивой, поэтому ее называют структурно устойчивой.

Если САУ астатическая, то n - порядок астатизма, равен количеству последовательно включенных интеграторов. При ее размыкании характеристическое уравнение системы имеет нулевые корни, поэтому при →∞ АФЧХ стремится к ∞ (рис. 4.2.5в и 4.2.5г). Например, пусть Wр(p) = K/(p(Tp+1)), тогда АФЧХ разомкнутой САУ:

W(j) = F:\Дисциплины\Основы теории управления\Заготовки\Лекции по Теории АУ\Теория автоматического управления-10_files\lecture10_files\image008.gif= P() + jQ().

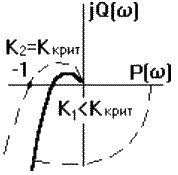


Рис. 4.3.2.

Так как порядок знаменателя больше порядка числителя, то при →0 имеем P()→∞, Q()→ -j∞. Подобная АФЧХ представлена на рис. 4.3.2. Так как АФЧХ терпит разрыв, трудно сказать, охватывает ли она точку (-1,j0). В этом случае пользуются следующим приемом: если АФЧХ терпит разрыв, уходя в бесконечность при →0, ее дополняют мысленно полуокружностью бесконечного радиуса, начинающейся на положительной вещественной полуоси и продолжающейся до АФЧХ в отрицательном направлении. После этого можно применить критерий Найквиста. Как видно из рисунка, САУ, имеющая одно интегрирующее звено, является структурно устойчивой.

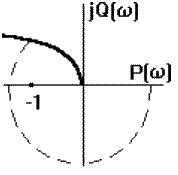


Рис. 4.3.3.

Если САУ имеет два интегрирующих звена (порядок астатизма 2), ее АФЧХ уходит в бесконечность во втором квадранте (рис. 4.3.3). Например, пусть Wр(p) = K/(p2 (Tp+1)), тогда АФЧХ САУ:

 W(j) = F:\Дисциплины\Основы теории управления\Заготовки\Лекции по Теории АУ\Теория автоматического управления-10_files\lecture10_files\image014.gif = P() + jQ().

При →0 имеем P()→ -∞, Q()→ j∞. Такая САУ не будет устойчива ни при каких значениях параметров, то есть она структурно неустойчива.

Структурно неустойчивую САУ можно сделать устойчивой, включив в нее корректирующие звенья (например, дифференцирующие) или изменив структуру САУ, например, с помощью местных обратных связей.

***Понятие запаса устойчивости.*** В условиях эксплуатации параметры системы по тем или иным причинам могут меняться в определенных пределах (старение, температурные колебания и т.п.). Эти колебания параметров могут привести к потере устойчивости системы, если она работает вблизи границы устойчивости. Поэтому стремятся спроектировать САУ так, чтобы она работала вдали от границы устойчивости. Степень этого удаления называют запасом устойчивости.

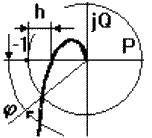


Рис. 4.3.4.

Согласно критерию Найквиста, чем дальше АФЧХ от критической точки (-1, j0), тем больше запас устойчивости. Различают запасы устойчивости по модулю и по фазе.

Запас устойчивости по модулю характеризует удаление годографа АФЧХ разомкнутой САУ от критической точки в направлении вещественной оси и определяется расстоянием h от критической точки до точки пересечения годографом оси абсцисс (рис. 4.3.4).

Запас устойчивости по фазе характеризует удаление годографа от критической точки по дуге окружности единичного радиуса и определяется углом  между отрицательным направлением вещественной полуоси и лучом, проведенным из начала координат в точку пересечения годографа с единичной окружностью.

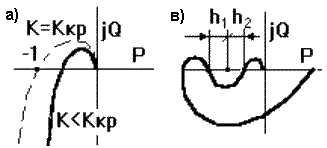


Рис. 4.3.5.

Как уже отмечалось, с ростом коэффициента передачи разомкнутой САУ растет модуль каждой точки АФЧХ и при некотором значении K = Kкр АФЧХ пройдет через критическую точку (рис. 4.3.5а) и попадет на границу устойчивости, а при K > Kкр замкнутая САУ станет неустойчива. Однако в случае АФЧХ типа 1 (рис. 4.2.4) (получаются из-за наличия внутренних обратных связей) не только увеличение, но и уменьшение K может привести к потере устойчивости замкнутых САУ (рис. 4.3.5в). В этом случае запас устойчивости определяется двумя отрезками h1 и h2, заключенными между критической точкой и АФЧХ.

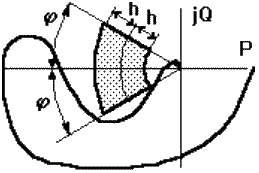


Рис. 4.3.6.

Обычно при создании САУ задаются требуемыми запасами устойчивости h и , за пределы которых она выходить не должна. Эти пределы выставляются в виде сектора, вычерчиваемого вокруг критической точки, в который АФЧХ разомкнутой САУ входить не должна (рис. 4.3.6).

***Анализ устойчивости по ЛЧХ.*** Оценку устойчивости по критерию Найквиста удобнее производить по ЛЧХ разомкнутой САУ. Очевидно, что каждой точке АФЧХ будут соответствовать определенные точки ЛАЧХ и ЛФЧХ.

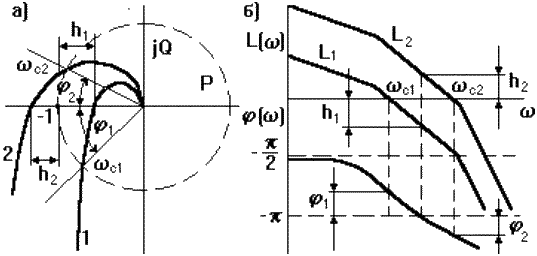


Рис. 4.3.7.

Пусть известны частотные характеристики двух разомкнутых САУ (1 и 2), отличающихся друг от друга только коэффициентом передачи K1 < K2. Пусть первая САУ устойчива в замкнутом состоянии, вторая нет (рис. 4.3.7).

Если W1(p) - передаточная функция первой САУ, то передаточная функция второй САУ W2(p) = KF:\Дисциплины\Основы теории управления\Заготовки\Лекции по Теории АУ\Теория автоматического управления-10_files\lecture10_files\tochka.gifW1(p), где K = K2/K1. Вторую САУ можно представить последовательной цепочкой из двух звеньев с передаточными функциями K (безынерционное звено) и W1(p), поэтому результирующие ЛЧХ строятся как сумма ЛЧХ каждого из звеньев. Поэтому ЛАЧХ второй САУ: L2() = 20 lg K + L1(), а ЛФЧХ: 2() = 1().

Пересечениям АФЧХ вещественной оси соответствует значение фазы  = -. Это соответствует точке пересечения ЛФЧХ = - линии координатной сетки. При этом, как видно на АФЧХ, амплитуды A1() < 1, A2() > 1, что соответствует на ЛАЧХ значениям L1() = 20 lg A1() < 0 и L2() > 0.

Сравнивая АФЧХ и ЛФЧХ можно заключить, что система в замкнутом состоянии будет устойчива, если значению ЛФЧХ  = - будут соответствовать отрицательные значения ЛАЧХ и наоборот. Запасам устойчивости по модулю h1 и h2, определенным по АФЧХ соответствуют расстояния от оси абсцисс до ЛАЧХ в точках, где  = -, но в логарифмическом масштабе.

Особыми точками являются точки пересечения АФЧХ с единичной окружностью. Частоты c1 и c2, при которых это происходит, называют частотами среза.

В точках пересечения A() = 1 = > L() = 0 - ЛАЧХ пересекает горизонтальную ось. Если при частоте среза фаза АФЧХ c1 > - (рис. 4.3.7а кривая 1), то замкнутая САУ устойчива. На рис. 4.3.7б это выглядит так, что пересечению ЛАЧХ горизонтальной оси соответствует точка ЛФЧХ, расположенная выше линии = -. И, наоборот, для неустойчивой замкнутой САУ (рис. 4.3.7а кривая 2) c2 < -, поэтому при  = c2 ЛФЧХ проходит ниже линии  = -. Угол 1 = c1-(-) является запасом устойчивости по фазе. Этот угол соответствует расстоянию от линии = - до ЛФЧХ.

Исходя из сказанного, критерий устойчивости Найквиста по логарифмическим ЧХ, в случаях, когда АФЧХ только один раз пересекает отрезок вещественной оси [-∞; -1], можно сформулировать так: для того, чтобы замкнутая САУ была устойчива необходимо и достаточно, чтобы частота, при которой ЛФЧХ пересекает линию = -, была больше частоты среза.

Если АФЧХ разомкнутой САУ имеет сложный вид, то ЛФЧХ может несколько раз пересекать линию  = -. В этом случае применение критерия Найквиста несколько усложняется. Однако во многих случаях данной формулировки критерия Найквиста оказывается достаточно.

**4.4. ТОЧНОСТЬ САУ [8].**

Понятие точности является центральным в теории автоматического управления, так как позволяет количественно выразить показатели качества САУ. Различают точность, рассматриваемую в переходном процессе - динамическая точность, и точность в установившемся режиме - статическая точность.

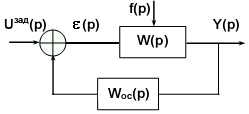


Рис. 4.4.1.

Проще всего рассмотреть понятие точности на примере следящей системы. Для этого наилучшим образом применима передаточная функция по ошибке, позволяющая записать сигнал ошибки при любом виде задающего воздействия:

(p) = W(p) Uзад(p) + Wf(p) f(p).

***Статическая точность*** в следящей системе определяется при гармоническом входном воздействии с использованием передаточной функции по ошибке.

p Wc(p) Uзад(p), Wc(p) = 1/(1+W(p)).

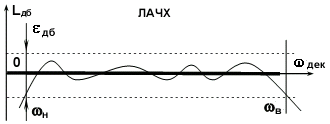


Рис. 4.4.2.

Рассмотрим логарифмическую частотную характеристику системы в установившуюся реакцию при гармоническом входном воздействии (рис. 4.4.2). Жирной линией показан идеальный случай абсолютно точной системы. Реальная частотная характеристика отличается от идеальной и в некоторой полосе (н, в) не выходит за пределы допуска . Такое же рассуждение справедливо и для ФЧХ. Задав допустимые границы точности по амплитуде и по фазе, получим область частот, где гарантируется данная точность - это полоса пропускания. Задавая требуемую рабочую частоту по приведенным выше формулам можно вычислить ошибку на этой частоте при гармоническом воздействии.

Общий способ повышения точности (в статическом и динамическом режимах) – обеспечение следующих оценок:

Wзс(p) = W(p)/(1+W(p) ≈ 1 - Мера точности воспроизведения задающего воздействия в замкнутой системе.

Wс(p) = 1/(1+W(p) ≈ 0 - Мера малости ошибки слежения.

Один из основных способов повышения точности - увеличение коэффициента k разомкнутой системы. При увеличении k оба приближённых равенства оценок выполняются всё более точно, что говорит об общем повышении точности, причём это повышение точности происходит при любой W(p).

Однако это не значит, что можно таким образом достичь любой желаемой точности. Здесь начинает сказываться одно из фундаментальных противоречий в рамках ТУ - противоречие между точностью системы и запасом устойчивости. При чрезмерном увеличении k возможна потеря устойчивости замкнутой системы. Годограф Найквиста, не охватывающий точку (-1; j0), но проходящий, например, из 3 квадранта во второй, при увеличении k "раздувается" относительно начала координат и начинает охватывать эту точку, то есть нарушается условие критерия устойчивости Найквиста. Повышение точности всегда приводит к уменьшению запаса устойчивости по амплитуде.

Конкретные значения точности анализируемой САУ проводятся разложением W(p) в ряд Тейлора в окрестностях p=0 и анализом коэффициентов этого ряда.

***Динамическая точность*** относится к более сложным задачам анализа САУ, т.к. требует изучения всего переходного процесса. При достаточно большом значении модуля АФЧХ в разомкнутой системе передаточная функция прямой ветви имеет пренебрежимо малое значение, передаточная функция замкнутой системы будет в основном определяться цепью ОС. Если коэффициент передачи разомкнутой системы много больше единицы W(p)Woc(p) >>1 и |W(p)| >>1, то для замкнутой системы можно принять:

Wзс(p) = W(p)/(1+W(p)Woc(p)) ≈ 1/Woc(p),

что существенно упрощает анализ системы.

Для повышения динамической точности системы обычно используется принцип комбинированного управления по задающему воздействию (принцип инвариантности).

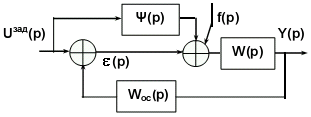


Рис. 4.4.3.

Добавим в стандартную структуру системы дополнительную передаточную функцию Ψ(p) ≈ 1/(W(p)Woc(p)) так, чтобы сигнал ошибки вообще не зависел от задающего воздействия (рис. 4.4.3). Это можно выполнить введением в систему дополнительной ветви прохождения сигнала, и подобрать коэффициент передачи в этой ветви так, чтобы компенсировать нежелательный сигнал. Аналогичная операция может быть выполнена и на возмущающее воздействие f(p).

**4.5. КАЧЕСТВО САУ [1, 2, 8, 12].**

***Показатели качества систем автоматического управления.*** Требование устойчивости для САУ относится к числу необходимых, но не может считаться достаточным. Система может быть устойчивой, т. е. ее переходный процесс носит затухающий характер, но время затухания настолько велико или ошибка в установившемся режиме настолько большая, что практически данная система не может быть использована. Поэтому система должна быть не только устойчивой, но иметь определенный переходный процесс, а ошибки в установившихся режимах не должны превышать допустимых.

Характер переходного процесса линейной системы в отличие от устойчивости зависит не только от параметров системы, но и от вида возмущающего (задающего) воздействия и начальных условий. Чтобы сравнивать системы по характеру переходного процесса, из возможных воздействий выбирают типовые или наиболее неблагоприятные и определяют кривую переходного процесса при нулевых начальных условиях. В качестве типовых воздействий обычно принимают единичное ступенчатое воздействие, единичный импульс, линейно нарастающее воздействие, синусоидальное. Для большинства систем наиболее неблагоприятным является воздействие вида единичной ступенчатой функции t) =1(t). Реакция системы на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях, как известно, называется переходной функцией системы. Для следящих систем обычно рассматривают переходную функцию H(t), вызванную изменением задающего воздействия 1(t), а для систем стабилизации переходную функцию Hf(t), вызванную изменением возмущающего воздействия f(t).

Показатели качества переходного процесса дают представление о поведении системы только в переходном режиме. Точность системы в установившихся режимах оценивается с помощью статических и динамических ошибок. Эти ошибки по аналогии можно назвать показателем качества системы в установившихся режимах. Совокупность показателей качества переходного процесса и установившихся режимов называется показателями качества системы в целом.

Считается, что система обладает требуемым качеством, если ее показатели качества не превышают заданных значений, определенных назначением системы.

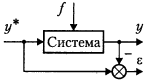


Рис. 4.5.1

Рассмотрим поведение системы управления (рис. 4.5.1), предназначенной для решения задачи слежения - соблюдения заданного закона изменения выходной переменной y(t). Последнее выражается в виде целевого условия

y(t) → у\*(t), (t) → 0, (4.5.1)

(t) = y\*(t) - у(t),

где(t) - ошибка (рассогласование) системы. При ненулевых начальных рассогласованиях система должна с течением времени обеспечить с некоторой степенью точности совпадение входного (задающего) y\*(t) и выходного y(t) сигналов (устранение ошибки (t)).

Мгновенное устранение возникающих рассогласований (t) в реальных системах невозможно в силу инерционности систем регулирования и ограничений, накладываемых на управляющие воздействия. Практически неосуществимо и абсолютно точное выполнение асимптотических условий (4.5.1) в силу действующих возмущений и дестабилизирующих факторов. Указанные соображения приводят к необходимости введения специальных показателей качества, характеризующих эффективность решения той или иной задачи управления.

Выходная переменная возмущенной системы определяется суммой свободных и вынужденных составляющих движения:

y(t) = yсв(t) + yв(t),

где в силу устойчивости системы выполняется условия

yсв(t) → 0, yв(t) → yу(t), (4.5.2)

Условия (4.5.2) соответствуют переходному режиму системы, по окончанию которого система "переходит" в установившийся режим yy(t).

В зависимости от свойств системы переходный режим может оказаться достаточно быстрым или медленным, монотонным или колебательным. Для оценки поведения системы в переходном режиме вводятся динамические показатели качества, т. е. численные оценки быстродействия и колебательности системы (время переходного процесса, затухание, перерегулирование, и пр., см. ниже).

Наиболее просто оценить качество переходного режима *автономной* системы, для которой вынужденная составляющая отсутствует. В установившемся режиме выходная переменная системы в идеальном случае должна быть идентична задающему воздействию, что соответствует нулевому значению установившейся ошибки.

Существует ряд универсальных приемов, позволяющих одновременно оценить динамические и/или точностные показатели системы, к которым относятся методика оценки качества по переходной функции, оценка по интегральным критериям и т. д.

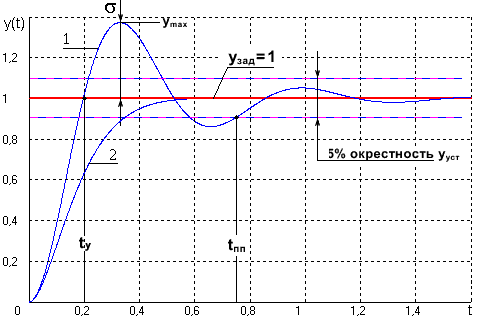


Рис. 4.5.2.

***Показатели качества переходного процесса.*** Переходная функция системы оценивается с помощью совокупности характеристик, называемых показателями качества переходного процесса. Принято использовать следующие стандартные показатели качества переходного процесса, отражённые на типичном графике 1 переходного процесса в следящей системе со ступенчатым задающим воздействием (рис. 4.5.2):

* tпп - время переходного процесса, по истечении которого отклонение управляемой величины y(t) относительно заданного (установившегося) значения yзад по абсолютному значению становится (и остается в дальнейшем) меньше определенной заданной величины уст. Обычно принимается уст = yзад,  = 0.05. Время регулирования характеризует быстроту затухания переходного процесса.
* tу - время установления, промежуток времени, за который управляемая величина в первый раз достигает своего установившегося значения, характеризует скорость процесса управления.
* уст - установившаяся ошибка (статическая точность, уст = e(∞) =1- ууст.). Если уст=0, то система астатическая.
* σ% - относительное перерегулирование (σ = (ymax-yзад)/yзад). Обычно требуют, чтобы значение σ было менее 18%. Перерегулирование характеризует колебательные свойства процессов. При нулевом значении  процесс носит монотонный характер (график 2 на рис. 4.5.2), а при достаточно больших  приближается к незатухающему колебательному движению.
* n - число колебаний за время переходного процесса (≤3шт.).

Как известно (и следует из выражения (4.1.11), чем дальше полюсы характеристического уравнения системы находятся от границы устойчивости (слева от мнимой оси комплексной плоскости), тем выше скорость протекания переходных процессов в системе. Для количественной оценки быстродействия систем используется также понятие *степени устойчивости*, которой называется положительное число, соответствующее расстоянию от мнимой оси до ближайшего к ней корня pi:

min Re pi. i = [1, n].

В общем случае, этому условию соответствует пара комплексно сопряженных корней

p1,2 = - ± j,

c соответствующей наиболее медленной колебательной составляющей:

yi(t) = A exp(-t) sin(t+).

Отсюда, по затуханию колебательного процесса exp(-at) нетрудно определить время переходного процесса по заданной величине :

tпп ≈ (1/) ln (1/).

Знак приближенности в данном случае отражает тот факт, что другие составляющие общего решения (4.1.11) также могут внести определенную долю в значение tпп, особенно, если вещественные части их полюсов близки по значениям к минимальному значению .

По переходной характеристике и значению установившейся ошибки (ошибки при t>>tпп) можно оценить точность системы в режиме стабилизации - при постоянном входном или заданном воздействии у\*(t)=const.

Эти показатели связаны с запасами устойчивости по амплитуде и по фазе. Поэтому, обеспечение стандартных показателей качества обеспечивает необходимую устойчивость. Значения показателей могут быть легко определены, даже аналитически. Задачу обеспечения показателей можно рассмотреть как оптимизационную. Как правило, эта задача оказывается многокритериальной и достаточно трудной для решения, в том числе, численного.

При синтезе САУ в системе обычно выделяются неизменяемая часть и изменяемая часть, в которую можно вносить коррективы. Неизменяемая часть системы задает возможность получения гарантированного качества в том смысле. Обычно качество системы можно существенно повысить, однако эта задача синтеза существенно сложнее, чем задача моделирования и анализа системы. Классическим методом повышения качества системы является метод диаграмм В.В.Солодовникова. Практическая задача оптимизации обычно выполняется с использованием корректирующих устройств.

***Последовательное корректирующее устройство.*** Передаточная функция разомкнутой скорректированной системы равна исходной, умноженной на передаточную функцию корректора. Корректирующее устройство включается последовательно в контуре системы в любом месте. Для исследования идеально подходят ЛАЧХ, так как они складываются при последовательном соединении. ЛАЧХ и ЛФЧХ корректора находятся в виде разности желаемых и имеющихся ЧХ системы.

Типичным последовательным корректирующим устройством является ПИД- регулятор. Эти пропорционально-интегрально-дифференциальные регуляторы выпускаются в широком ассортименте и в разнообразных реализациях, включая программную на контроллерах.

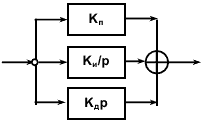


Рис. 4.5.3.

ПИД-регулятор (рис. 4.5.3) имеет три параллельных канала: усилитель с коэффициентом kп, интегратор с коэффициентом kи, дифференциатор с коэффициентом kд. Усилитель позволяет изменить коэффициент усиления системы и уменьшить установившуюся ошибку: eуст =1/(1+kп k). Интегратор повышает порядок астатизма на 1. Увеличение kд повышает запас устойчивости и сглаживает переходный процесс, поэтому дифференциальную составляющую называют демпфированием.

Таким образом, с помощью интегральной и пропорциональной составляющих можно обеспечить первый порядок астатизма и желаемую статическую точность в ущерб запасу устойчивости, а дифференциальная составляющая повышает запас устойчивости.

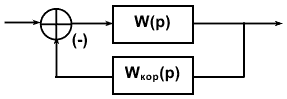


Рис. 4.5.4.

***Параллельное корректирующее устройство*** имеет вид местной ООС (рис. 4.5.4). Для синтеза параллельных корректирующих устройств использовать логарифмические частотные характеристики менее удобно, чем для последовательных. Существует ряд инженерных методов расчёта параллельных корректоров (например, метод диаграмм Никольса). Можно просто вычислять корректирующую Wкор(p) по желаемой Wзс(p).

Wкор(p) = (W(p)- Wзс(p))/(W(p)Wзс(p)).

Одна из двух передаточных функций Wкор(p) или Wзс(p) обычно не является (строго говоря) физически реализуемой. Тем не менее, всегда можно выбрать достаточно близкую реализуемую функцию.

***Метод Солодовникова*** позволяет построить корректирующее звено для имеющейся системы так, чтобы обеспечит требуемые типовые показатели качества и запас устойчивости по амплитуде и фазе. Метод основан на имеющейся связи между частотной характеристикой и переходной функцией:

H(t) = (2/) (P()/ sin(t) d,

где P() – вещественная часть АФЧХ W(j)=P()+jQ().

В.В. Солодовников доказал, что в любой САУ имеются следующие зависимости между основными показателями качества переходного процесса и Р(ω).

* σ% > 18%, если есть "горб", т.е. Рмах > Р0;
* σ% < 18%, если нет горба;
* σ% = 0, если производная dP/dω<0 и монотонно убывает. Требование монотонного убывания часто налагает неоправданные ограничения на конструкцию, достаточно обеспечивать σ% < 18%.

Диаграммы Солодовникова устанавливают связь между σ%, tпп, Рмах и ωс - частотой среза системы, то есть той частотой, где усиление системы равно 1 или L(ωс) = 0.

Область существенных частот (ωн, ωв) - это та часть частотной характеристики, которая в основном определяет качество системы. Диапазон ЛАЧХ для области существенных частот от +26дб. до -16дб. Уровень +26дб. соответствует усилению K=20 и соответствующей установившейся ошибке eуст=1/(1+К) ≈ 0.05, т.е. нижняя частота области существенных частот определяется статической точностью eуст ≈ 0.05 при ступенчатом входном воздействии. Левее частоты ωн ЛАЧХ не ниже +26дб, если не требуется астатизма, либо имеет наклон в зависимости от порядка астатизма. Уровень -16дб. соответствует малости влияния высокочастотных составляющих переходного процесса на уровне ≈ 10%. Наклон ЛАЧХ в области существенных частот должен быть -20дб./дек. На диаграмме Солодовникова по горизонтали отложена второстепенная величина Рмах/Р0, которая в настоящее время используется редко, а по вертикальным осям отложены σ%, tпп и ωс.

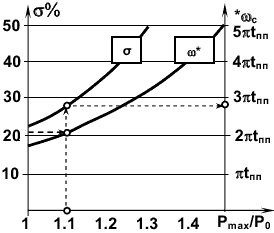


Рис. 4.5.5.

Использовать диаграммы Солодовникова (рис. 4.5.5) можно по-разному. Обычно применяется такая методика. Уточняют, какие показатели качества могут быть сформулированы заказчиком, и остальные параметры, необходимые для построения корректирующего устройства, определяют по диаграммам Солодовникова. По графикам можно, например, определить при заданном перерегулировании и времени переходного процесса частоту среза системы: (σ%, tпп) → ωс, n, ∆A, ∆φ. Причём последние три параметра обеспечиваются автоматически. Тогда алгоритм синтеза САУ при исходно заданных σ%, tпп может быть, например, таким:

По диаграммам определяем ωс (выражение ωс через tпп).

Строим область существенных частот, что даёт нам основную часть желаемой ЛАЧХ. Достраиваем высокочастотную часть произвольно и низкочастотную часть, исходя из требуемого порядка астатизма.

Синтезируем последовательное корректирующее звено, обеспечивающее такую ЛАЧХ. Использование методики Солодовникова гарантирует показатели качества замкнутой системы и запасы устойчивости по амплитуде на уровне ∆A%=200 (коэффициент усиления может быть увеличен в два раза), и по фазе на уровне ∆φ =35˚.

***Программы анализа качества процессов управления.*** Современные инструментальные средства анализа и синтеза систем управления представлены множеством различных специализированных программных пакетов и комплексов, которые позволяют в диалоговом режиме выполнять операции над матрицами и полиномами, вычислять временные и частотные характеристики, строить корневые годографы, анализировать чувствительность и устойчивость, проверять управляемость и наблюдаемость системы, находить ее полюса и нули, сравнивать переходные процессы в системе по интегральным критериям и находить лучший, определять параметры и характеристики стохастических сигналов на входе и на выходе системы, составлять и преобразовывать математические модели исследуемой системы.

Эти программные средства обладают развитым сервисом, что позволяет строить и сравнивать графики нескольких процессов, изображать взаимные зависимости, фазовые кривые и портреты, строить характеристики и диаграммы, изображать и преобразовывать структурные модели системы, при этом графические построения могут быть выполнены в двух- и трехмерном представлении.

Известны фирменные и университетские программные пакеты анализа и синтеза систем управления: LSАР – США (Ливерморская национальная лаборатория) ТUТSIМ – США (Станфордский университет); СLADP – Великобритания (Кембридж); КЕDDС – Германия (Рурский университет); МАТRIХ - фирмы Integrated Systems Inc.; SIMULINK в среде МАТLАВ известной фирмы Маth Works Inc.; МАRS – Украина (Институт кибернетики). Среди отечественных инструментальных программных средств известны разработки Академии авиационного и космического приборостроения, Санкт-Петербург; Московского инженерно-физического института; Московского государственного технического университета; Института проблем управления РАН, Москва.

Программные комплексы ТUТSIМ, МАТRIХ, SIMULINK позволяют исследовать модели любых динамических систем, которые испытывают любые внешние воздействия. Комплексы обеспечивают команды изменения структуры модели, ее параметров, выходных блоков и диапазонов рассчитываемых данных; команды одиночного и многократного запуска, останова и продолжения процесса моделирования с выводом графиков и числовых данных на экран, принтер или в файл; команды графического сервиса, позволяющие изображать оси, сетку, маркировку, комментарии к графикам, строить фазовые кривые или взаимозависимости и прочее. Комплексы располагают различными функциональными блоками для моделирования любых непрерывных и дискретных, линейных и нелинейных динамических систем, испытывающих детерминированные и стохастические воздействия.

**4.6. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В САУ [8].**

В реальных системах имеются помехи (возмущения), действующие в каналах передачи информации. Часто не имеется никакой, кроме статистической, информации об этих факторах, что заставляет считать эти параметры случайными величинами с заранее неизвестными законами распределения. Так возникает задача управления в условиях неопределенности. Здесь имеются два аспекта: управление в условиях неопределенности и задача борьбы с помехами.

***Модели случайных сигналов в САУ.*** Случайные процессы и отображающие их сигналы будем считать функциями времени, принимающими случайные значения. В каждый момент времени, значение случайного процесса есть случайная величина x(t). Основной характеристикой случайной величины в момент времени t является функция p(x,t) - плотность вероятности в момент t. Плотность вероятности определяет функции математического ожидания и дисперсии случайных величин:

Mx(t) =x(t) p(x,t) dx, Dx(t) =(x(t)-Mx(t))2 p(x,t) dx.

Для описания статистической взаимосвязи значений x(t) в разные моменты времени вводятся корреляционная функция сигнала x(t):

Kx(t1,t2) = M[(x(t1)-Mx(t1)) (x(t2)-Mx(t2))],

и взаимная корреляционная функция сигналов x(t) и y(t):

Kxу(t1,t2) = M[(x(t1)-Mx(t1)) (y(t2)-My(t2))].

Отметим, что Kx(t,t) = Dx(t), т.е. при t1 = t2 = t это есть дисперсия в момент времени t.

*Стационарным случайным процессом* называется такой случайный процесс, для которого корреляционная функция зависит не от абсолютных значений t1 и t2, а только от их разности K(t1,t2) = K(t1-t2) = K(. Дисперсия и математическое ожидание для стационарного случайного процесса являются константами. Стационарный случайный процесс для САУ не меняет своих статистических характеристик за время жизни системы.

Спектральная плотность S(ω) стационарного случайного процесса, есть интеграл (преобразование) Фурье от корреляционной функции K(τ). Соответственно, корреляционная функция K(τ) есть обратное преобразование Фурье спектральной плотности S(ω):

S() = K() exp(-j) d, K() = (1/2)S() exp(j) d

Спектральная плотность случайного процесса описывает разложение мощности процесса по гармоническим составляющим. Можно выразить дисперсию через интеграл от спектральной плотности. Это означает, что дисперсия есть суммарная мощность случайного процесса, распределённая по частоте:

D = K(0) = (1/2)S() d

***Фильтрация помех.*** Будем считать, что в САУ помехи могут быть в двух основных местах: помеха в канале управления (к управлению добавляется помеха W) и помеха в канале измерения (выходной сигнал измеряется с помехой V). Наиболее общая задача фильтрации шума - максимально возможное подавление обеих помех.

Если рассмотреть шумовой сигнал с бесконечным равномерным спектром, то ему будет соответствовать корреляционная функция в виде -функции:

S(ω) = = const; K(τ) = (/2π) δ(τ); D = K(0) =∞.

Эти три уравнения описывают “белый шум” с интенсивностью . Ясно, что такой сигнал не может быть физически реализован в силу бесконечной мощности. Можно, однако, реализовать сколь угодно близкий к этому случайный процесс, называемый "розовым шумом". Формально розовый шум получается при пропускании белого шума через любое реальное звено. При этом ограничивается спектр сигнала, так как никакое реальное звено не может пропускать бесконечную полосу частот. В результате, у реального розового шума может быть сколь угодно широкий, но убывающий спектр, а его корреляционная функция может очень быстро убывать, что означает малую связь значений процесса в разные моменты времени.

Задачу фильтрации помех будем решать как оптимальную, то есть искать условия наибольшего подавления помех. Помехи будем считать случайными процессами с известными корреляционными функциями (спектральными характеристиками). Алгоритмы управления и фильтрации могут быть реализованы по отдельности и их одновременное функционирование в замкнутой системе не мешает друг другу. Другими словами, оптимальный фильтр можно рассчитывать отдельно от регулятора в том смысле, что характеристическое уравнение замкнутой системы оказывается равным произведению уравнений подсистемы регулирования и подсистемы фильтрации.

При анализе и синтезе фильтров используется аддитивная модель входного сигнала: u(t) = s(t)+q(t), где s(t) - полезная составляющая сигнала управления, q(t) - составляющая шумов и помех. Синтез оптимальных фильтров производится с максимальным использованием известной априорной информации как о сигналах, которые необходимо выделять, так и о шумах и помехах. Как правило, используется информация о природе полезного сигнала и шума, об их спектральном составе, о корреляционных и взаимных корреляционных характеристиках. Наличие определенных особенностей (различий) в характеристиках сигнала и шума позволяет реализовать фильтр вообще и оптимальный фильтр в частности. Если такие особенности отсутствуют, постановка задачи становится некорректной.

При наличии помех абсолютно точное выделение полезного сигнала методами линейной фильтрации, как правило, невозможно. Результат фильтрации

z(t) = h() ③ u(t-) (4.6.1)

отличается от s(t) на величины (t) = z(t)-s(t), которые являются абсолютными значениями погрешности воспроизведения полезного сигнала по координатам t. Качество фильтра оценивается средним значением квадрата величины (t):

. (4.6.2)

Выражение (4.6.2) дает возможность определить функцию h(t) фильтра по критерию минимума среднего квадратического отклонения выходного сигнала от его действительной или заданной формы.

***Фильтр Винера*** является оптимальным фильтром формирования из входного сигнала u(t) выходного сигнала z(t) при известной форме полезного сигнала s(t), который содержится во входном сигнале в сумме с шумами. В качестве критерия его оптимизации используется среднее квадратическое отклонение сигнала z(t) на выходе фильтра от заданной формы сигнала s(t). Подставим уравнение свертки (4.6.1) в раскрытой форме интегральной свертки в выражение (4.6.2) и получим отклонение 2 выходного сигнала z(t) от заданной формы выходного сигнала s(t):

. (4.6.3)

Минимум выражения (4.6.3) определяет функцию импульсного отклика h(t) оптимального фильтра. При этом для оптимального фильтра действительно выражение:

h(t) ③ Ku() = Kzu(). (4.6.4)

Другими словами,*свертка функции отклика оптимального фильтра с функцией автокорреляции входного сигнала должна быть равна функции взаимной корреляции выходного и входного сигналов.*

Отметим, что Ku() = Ru()+Rq(), где Ru - функция автокорреляции сигнала, Rq - функция автокорреляции шума, а Kzu() = Bzs()+Bzq(), где Bzs - функция взаимной корреляции сигналов z(t) и s(t), Bzq - функция взаимной корреляции сигнала z(t) и помех q(t). Подставляя данные выражения в (12.3.3), получаем:

h(n) ③ [Ru()+Rq()] = Bzs()+Bzq(). (4.6.5)

***Частотная характеристика фильтра*** находится преобразованием Фурье левой и правой части уравнения (4.6.5):

H()[Wu()+Wq()] = Wzs()+Wzq(),

H() = [Wzs()+Wzq()] / [Ws()+Wq()], (4.6.6)

где Ws() ⬄ Rs() и Wq() ⬄ Rq() - энергетические спектры (плотности мощности) сигнала и помех, Wzs() ⬄ Bzs() - взаимный энергетический спектр входного и выходного сигналов, Wzq() ⬄ Bzq() - взаимный энергетический спектр выходного сигнала и помех.

Обычно имеет место статистическая независимость полезного сигнала, а, следовательно, и сигнала z(t), от шумов, при этом Bzq = 0 и фильтр называют *оптимальным по сглаживанию шумов* при заданной форме выходного сигнала:

H() = Wzs() / [Ws()+Wq()], (4.6.7)

Фильтр (4.6.7) оптимален в том смысле, что максимизирует отношение мощности сигнала к мощности шума по всему интервалу сигнала, но не в каждой индивидуальной точке.

Выражения (4.6.6-4.6.7) достаточно наглядно демонстрируют физический смысл формирования передаточной функции фильтра. При воспроизведении сигнала частотная функция взаимной корреляции входного сигнала с выходным Wzs (плотность взаимной мощности) повторяет частотную функцию автокорреляции Ws (плотность мощности сигнала). Плотность мощности статистических шумов Wq распределена по частотному диапазону равномерно, в отличие от плотности мощности сигнала Ws, которая, в зависимости от формы сигнала, может занимать любые частотные интервалы спектрального диапазона. На частотах, где сосредоточена основная энергия сигнала, имеет место Ws()>>Wq() и H() ⇒ 1 (как минимум, больше 0.5). Там, где значение Ws() становится меньше Wq, коэффициент передачи фильтра становится меньше 0.5, и в пределе H()=0 на всех частотах, где полностью отсутствуют частотные составляющие сигнала.

Таким образом, оптимальные фильтры учитывают особенности спектрального состава сигналов и способны формировать передаточные функции любой сложности на выделение полезных частот сигналов из любых диапазонов спектра с максимальных подавлением шумов на всех частотах спектрального диапазона, не содержащих полезных сигналов, при этом границы усиления-подавления устанавливаются автоматически по заданному уровню шумов.

**литература**

1. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы: Учебное пособие для вузов. - СПб.: Питер, 2005. - 336 с.

2. Повзнер Л.Д. Теория систем управления: Учебное пособие для вузов. - М.: Изд. МГГУ, 2002. - 472 с.

7. Туманов М.П. Теория автоматического управления: Лекции. URL: <http://elib.ispu.ru/library/lessons/Tihonov_2/index.htm>.

8. Туманов М.П. Теория управления. Теория линейных систем автоматического управления: Учебное пособие. – МГИЭМ. М., 2005, 82 с. URL: http://window.edu.ru/window\_catalog/files/r24738/5.pdf.

11. Михайлов В.С. Теория управления. – К.: Выща школа, 1988.

12. Зайцев Г.Ф. Теория автоматического управления и регулирования. – К.: Выща школа, 1989.

[Главный сайт автора](http://prodav.narod.ru/) ~ [Лекции по ОТУ](http://prodav.narod.ru/otu/index.html)

О замеченных опечатках, ошибках и предложениях по дополнению: [davpro@yandex.ru](mailto:davpro@yandex.ru).

**Copyright ©2008 Davydov А.V.**